

Ein wenig Mathematik

VERSUCHEN SIE, DIESE AUFGABEN OHNE TASCHENRECHNER ZU BEARBEITEN.

VERGESSEN SIE NICHT, BEI ALLEN RECHNUNGEN EINE ÜBERSCHLAGSRECHNUNG VORZUNEHMEN!

1 Gleichungen umstellen

Häufig steht man vor dem Problem, dass die gesuchte Größe in einer Gleichung nicht allein auf der linken oder rechten Seite steht. Man muss also erst nach der gesuchten Größe umformen. Tritt diese mehrfach auf, muss sie auf eine Seite der Gleichung gebracht werden.

Dabei gilt genau das, was in der Chemie gilt – bei einer Gleichung muss auf der linken und rechten Seite immer das gleiche stehen. Auch Rechenoperationen müssen auf der linken und rechten Seite vorgenommen werden!

1.1 Lösen von einfachen Gleichungen mit X im Zähler

Nr.	Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1.1.1	$-90 x = 30$	Gesamte Gleichung durch (-90) teilen $\frac{-90x}{-90} = \frac{30}{-90}$ Die -90 auf der linken Seite kann man kürzen, auf der rechten Seite kann man Zähler und Nenner durch 30 teilen. $x = -\frac{1}{3}$	$x = -\frac{1}{3}$ $= -0,33$
1.1.2	$100 x + 18 x = 590$	Summanden mit x zusammenfassen, in dem x ausgeklammert wird $x(100 + 18) = 590$ Wert in der Klammer berechnen $x(118) = 590$ Beide Seiten der Gleichung durch 118 teilen $\frac{x(118)}{118} = \frac{590}{118} = 5$	$x = 5$
1.1.3	$0,7 x + 10 = 0,2 x$	Die Ausdrücke mit x auf eine Seite bringen, indem z.B. auf beiden Seiten 0,7 x subtrahiert $0,7 x - 0,7 x + 10 = 0,2 x - 0,7 x$ wie oben nun x ausklammern	$x = -20$

		$10 = x(0,2 - 0,7)$ $10 = -0,5x$ dann auf beiden Seiten durch (-0,5) teilen $\frac{10}{-0,5} = \frac{-0,5x}{-0,5}$ Auf der rechten Seite kann man -0,5 kürzen! $\frac{10}{-0,5} = x$ Nun nur noch 10 durch (-0,5) teilen! $-20 = x$	
--	--	--	--

1.2 Lösen von einfachen Gleichungen mit X im Nenner

Nr.	Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1.2.1	$\frac{3}{x} - 100 = 200$	auf beiden Seiten der Gleichung 100 addieren $\frac{3}{x} - 100 + 100 = \frac{3}{x} = 200 + 100 = 300$ $\frac{3}{x} = 300$ nun beide Seiten mit x multiplizieren $\frac{3}{x} \cdot x = 300 \cdot x$ $3 = 300 \cdot x$ nun beide Seiten durch 300 teilen $\frac{3}{300} = \frac{300}{300} \cdot x$ $\frac{3}{300} = x$ $\frac{1}{100} = x$ $\frac{1}{100} = 0,01 = x$	$x =$ $1/100 =$ $0,01$
1.2.2	$\frac{50}{x} - 5 = \frac{100}{x}$	Die Brüche mit x auf eine Seite bringen, indem z.B. auf beiden Seiten 50/x abgezogen wird $\frac{50}{x} - \frac{50}{x} - 5 = \frac{100}{x} - \frac{50}{x}$ $-5 = \frac{50}{x}$	$x = -10$

		Nun beide Seiten der Gleichung mit x multiplizieren $-5 \cdot x = \frac{50}{x} \cdot x$ $-5 \cdot x = 50$ Nun beide Seiten der Gleichung durch -5 teilen $\frac{-5}{-5} \cdot x = \frac{50}{-5}$ $x = -10$	
1.2.3	$\frac{18}{x} + \frac{27}{x}$ $= 300 + \frac{15}{x}$	Es müssen zuerst alle Brüche mit x zusammengefasst wird. Wenn die Nenner gleich sind, können die Zähler addiert werden. Das erfolgt als erstes auf der linken Seite der Gleichung. $\frac{18 + 27}{x} = 300 + \frac{15}{x}$ $\frac{45}{x} = 300 + \frac{15}{x}$ Dann wird der Bruch von der rechten Seite auf die linke Seite gebracht, indem auf beiden Seiten der Gleichung $15/x$ subtrahiert wird. $\frac{45}{x} - \frac{15}{x} = 300 + \frac{15}{x} - \frac{15}{x}$ $\frac{30}{x} = 300$ Nun wird die gesamte Gleichung mit x multipliziert und durch 300 dividiert. $\frac{30}{x} \cdot \frac{x}{300} = 300 \cdot \frac{x}{300}$ $\frac{30}{300} = \frac{1}{10} = 0,1 = x$	$x = 1/10$ $= 0,1$

1.3 Arbeiten mit der quadratischen Gleichung

Die Gleichung muss die Form haben:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Wenn sie so nicht gegeben ist, muss entsprechend umgeformt werden! Erst dann kann die Lösungsgleichung angewendet werden.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Nr.	Aufgabe	Lösung
1.3.1	$x^2 = -6x + 16$	$x_1 = -8, x_2 = +2$
	Rechenweg: So umformen, dass auf einer Seite der Gleichung 0 steht, also z.B. auf beiden Seiten der Gleichung 6x addieren und 16 subtrahieren $x^2 + 6x - 16 = -6x + 16 + 6x - 16 = 0$ P ist 6 und q ist -16, diese Werte in die quadratische Gleichung einsetzen $x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} + 16}$ $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{\frac{36}{4} + 16}$ $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 16}$ $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{25}$ $x_{1,2} = -3 \pm 5$	
1.3.2	$11 - 2x = \frac{12}{x}$	$x_1 = \frac{16}{4} = 4, x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$
	Rechenweg: Hier muss zuerst dafür gesorgt werden, dass alle Terme mit x zusammengefasst werden. Dazu kann man die gesamte Gleichung mit x multiplizieren. $11 \cdot x - 2x \cdot x = \frac{12}{x} \cdot x$ $11 \cdot x - 2x^2 = 12$ Nun muss wieder dafür gesorgt werden, dass auf einer Seite der Gleichung 0 steht. Man kann also auf beiden Seiten der Gleichung 12 subtrahieren. $11 \cdot x - 2x^2 - 12 = 12 - 12$ $11 \cdot x - 2x^2 - 12 = 0$	

	Die quadratische Gleichung kann nur angewendet werden, wenn der Faktor vor x^2 1 ist. Deshalb muss nun die gesamte Gleichung durch -2 dividiert werden. Es ist auch einfacher, wenn man dann die Reihenfolge einhält, dass zuerst x^2, dann x und dann die letzte Zahl genannt wird. So erkennt man leichter, welchen Wert p bzw. q haben. $-2x^2 + 11x - 12 = 0$ $\frac{-2}{-2}x^2 + \frac{11}{-2}x - \frac{12}{-2} = 0$ $x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0$ Hier ist $p=-11/2$ und $q=+6$. $x_{1,2} = \frac{11}{2 \cdot 2} \pm \sqrt{\frac{11^2}{2^2 \cdot 4} - 6}$ $x_{1,2} = \frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16} - 6}$ Es kann immer noch ohne Taschenrechner weitergehen! Man muss den Term unter der Wurzel durch Erweitern mit 16 auf einen gemeinsamen Nenner bringen! $x_{1,2} = \frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16} - \frac{16}{16} \cdot 6}$ $x_{1,2} = \frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16} - \frac{96}{16}}$ $x_{1,2} = \frac{11}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$ Die Wurzel aus einem Bruch zieht man, indem man zuerst die Wurzel aus dem Zähler bestimmt und dieses Ergebnis durch die Wurzel aus dem Nenner teilt. $x_{1,2} = \frac{11}{4} \pm \frac{5}{4}$	
1.3.3	$-3x^2 + 2 = 0,2 + 9x$	$x_1 = -\frac{6,37}{2} = -3,185, x_2 = \frac{0,37}{2} = 0,185$
	Rechenweg: HIER DARF ZUM SCHLUSS MIT DEM TASCHENRECHNER GEARBEITET WERDEN! Gleichung wieder so umformen, dass auf einer Seite der Gleichung 0 steht, dazu auf beiden Seiten der Gleichung 0,2 subtrahieren und 9x subtrahieren $-3x^2 + 2 - 0,2 - 9x = 0,2 + 9x - 0,2 - 9x$	

	$-3x^2 + 1,8 - 9x = 0$ Nun den Faktor von x^2 auf 1 bringen und die Terme sortieren. $\frac{-3}{-3}x^2 + \frac{1,8}{-3} - \frac{9}{-3}x = 0$ $x^2 + 3x - 0,6 = 0$ P ist also 3 und q -0,6, einsetzen in die quadratische Gleichung $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} - (-0,6)}$ $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 0,6}$ Term unter der Wurzel mit 4 erweitern $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{4} \cdot 0,6}$ $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{11,4}{4}}$ Die Wurzel aus 11,4 darf ausnahmsweise mit dem Taschenrechner bestimmt werden! $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3,37}{2}$
--	--

1.4 Potenzrechnung

1.4.1 Zehnerpotenz - rationale Zahl

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle!

Angabe als Potenzzahl	Angabe als rationale Zahl
10^1	10
10^2	100
10^0	1
10^{-3}	0,001

10^3	1000
10^9	1000000000
10^{-5}	0,00001
10^6	1000000

Neben den Zehnerpotenzen gibt es auch Zweierpotenzen. Dabei gibt der Exponent an, wie oft die Zwei mit sich selbst multipliziert werden soll.

1.4.2 Zweierpotenzen

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle!

Angabe als Zweierpotenz	Algorithmus	Angabe als ganze Zahl
2^0	$2^0 = 2^{1-1} = \frac{2^1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$	1
2^1	2	2
2^2	2 x 2	4
2^3	2 x 2 x 2	8
2^4	2 x 2 x 2 x 2	16
2^5	2 x 2 x 2 x 2 x 2	32
2^6	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	64
2^7	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	128

Daneben wird auch in der Homöopathie von Potenzen gesprochen. Diese geben sehr kleine Dosen an, entsprechen also eine extrem hohen Verdünnung, deren tatsächliche Wirksamkeit kontrovers diskutiert wird. Dabei finden aber wieder Zehnerpotenzen Anwendung.

1.4.3 Homöopathische Potenzen

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle!

Angabe der Verdünnung	Angabe der Verdünnung in Zehnerpotenzschreibweise	Beschriftung
1:10	$1:10^1$	D 1
1:100	$1:10^2$	D 2
1:1 000	$1:10^3$	D 3
1:100 000	$1:10^5$	D 5
1:1 000 000 000 000	$1:10^{12}$	D 12
1:100 000 000 000 000 000 000	$1:10^{20}$	D 20

1.5 Rechnen mit Zehnerpotenzen

Zehnerpotenzen können ganz einfach multipliziert werden, indem man die Exponenten addiert.

$$10^2 \cdot 10^4 = 10^{2+4} = 10^6$$

$$10^2 \cdot 10^{-4} = 10^{2-4} = 10^{-2}$$

Zehnerpotenzen können ganz einfach dividiert werden, indem man vom Exponenten des Zählers den Exponenten des Nenners abzieht.

$$\frac{10^4}{10^2} = 10^{4-2} = 10^2$$

$$\frac{10^4}{10^{-2}} = 10^{4-(-2)} = 10^{4+2} = 10^6$$

Achtung, bei der folgenden Aufgabe muss man die Zehnerpotenz angleichen:

$$3,8 \cdot 10^{-2} + 5,6 \cdot 10^{-3} = 38 \cdot 10^{-3} + 5,6 \cdot 10^{-3} = (38 + 5,6) \cdot 10^{-3} = 43,6 \cdot 10^{-3} = 4,36 \cdot 10^{-2}$$

Wurzeln aus Zehnerpotenzen sind ganz einfach im Kopf auszurechnen, man muss einfach den Exponenten durch 2 teilen:

$$\sqrt{10^4} = 10^{4/2} = 10^2$$

$$\sqrt{10^{-10}} = 10^{-10/2} = 10^{-5}$$

Wenn Wurzeln aus Produkten mit Zehnerpotenzen gezogen werden sollen, kann man das oft im Kopf berechnen, wenn man an folgende Umrechnung denkt:

$$\sqrt{3,6 \cdot 10^{-9}} = \sqrt{36 \cdot 10^{-10}} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{10^{-10}} = 6 \cdot 10^{-10/2} = 6 \cdot 10^{-5}$$

1.5.1 Lösen Sie die folgende Gleichung ohne Taschenrechner!

$$\text{a) } X = \frac{10^{-2}}{10^3} \cdot \frac{10^{10}}{10^{-8}} \cdot \frac{10^0}{10^5} \quad X = 10^8$$

1.5.2 Lösen Sie die folgende Gleichung ohne Taschenrechner!

$$\text{c) } Y = \frac{10^{-2} \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-1}}{10^{-7} \cdot 10^{-4}} \quad Y = 10^0$$

1.5.3 Lösen Sie die folgende Gleichung ohne Taschenrechner!

$$\text{d) } Y = 9,1 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^3 \quad Y = 0,91 \cdot 10^3 + 3,5 \cdot 10^3 = (0,91 + 3,5) \cdot 10^3 = 4,41 \cdot 10^3$$

1.5.4 Lösen Sie die folgende Gleichung ohne Taschenrechner!

$$\text{e) } Z = \sqrt{6,4 \cdot 10^{-11}} \quad Z = \sqrt{64 \cdot 10^{-12}} = 8 \cdot \sqrt{10^{-12}} = 8 \cdot 10^{-\frac{12}{2}} = 8 \cdot 10^{-6}$$

1.6 Logarithmenrechnung

Ist eine Zehnerpotenz gegeben, kann man ganz leicht den dekadischen Logarithmus angeben. Dabei handelt es sich formal um nichts anderes als die Angabe des Exponenten.

$$\lg 10^3 = 3$$

1.6.1 Rationale Zahl – Zehnerpotenz – Logarithmus

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle!

Rationale Zahl	Angabe als Zehnerpotenz	Berechnung des dekadischen Logarithmus
1	10^0	0
0,01	10^{-2}	-2
1000	10^3	3
0,000001	10^{-6}	-6
10	10^1	1

Rechnen mit Logarithmen

Etwas problematischer wird es, wenn nicht nur eine reine Zehnerpotenz gegeben ist. Dann muss man doch auf den Rechner oder eine Logarithmentafel zurückgreifen. Man sollte aber immer eine Überschlagsrechnung machen, indem man in eine Zehnerpotenz umrechnet und die Regeln der Logarithmenrechnung berücksichtigt.

$$\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$$

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$$

$$\lg 0,385 = \lg(3,85 \cdot 10^{-1}) = \lg 3,85 + \lg 10^{-1} = \lg 3,85 - 1 = 0,585 - 1 = -0,415$$

Der Logarithmus von 3,85 wurde mit dem Taschenrechner ermittelt.

1.6.2 Von der rationalen Zahl zum Logarithmus

Geben Sie den Logarithmus der folgenden Zahlen an, vereinfachen Sie zuerst.

Rationale Zahl	Angabe als Zehnerpotenz	Angabe des dekadischen Logarithmus als Summe	Berechnung des dekadischen Logarithmus der Zehnerpotenz	Berechnung des dekadischen Logarithmus der rationalen Zahl MIT TASCHENRECHNER und Endergebnis
2	2×10^0	$\lg 2 + \lg 10^0$	$\lg 2 + 0$	0,301
0,03	3×10^{-2}	$\lg 3 + \lg 10^{-2}$	$\lg 3 - 2$	0,48-2=-1,5
50000	5×10^4	$\lg 5 + \lg 10^4$	$\lg 5 + 4$	0,69+4=4,69

1.7 Einfache Proportionen

Mit solchen einfachen Beziehungen kann man auch in der Chemie ganz viele Aufgaben lösen.

- a) Eine alkoholische Lösung enthält 1 g Alkohol in 250 mL. Wie viel Gramm Alkohol sind in 25 μ L enthalten?

Lösung:

Zuerst muss man alle Volumenangaben auf **eine** Einheit bringen.

25 μ L entsprechen 25×10^{-3} mL.

Nun kann folgende Proportion aufgestellt werden:

$$1 \text{ g} : 250 \text{ mL} = x \text{ g} : 25 \times 10^{-3} \text{ mL}$$

$$\frac{1 \text{ g}}{250 \text{ mL}} = \frac{x \text{ g}}{25 \cdot 10^{-3} \text{ mL}}$$

Auflösen nach x, indem beide Seiten der Gleichung mit 25×10^{-3} mL multipliziert werden:

$$\frac{1 \text{ g}}{250 \text{ mL}} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \text{ mL} = x \text{ g}$$

$$\frac{1 \text{ g}}{10} \cdot 10^{-3} = x \text{ g}$$

$$1 \text{ g} \cdot 10^{-4} = x \text{ g}$$

In der Lösung sind 10^{-4} g oder 10^{-1} mg oder 0,1 mg enthalten.

- b) Eine Konzentrationsangabe lautet: 10^{-1} mol/L. Geben Sie an, wie viel mol sich in 3 Litern befinden!

Die Konzentrationsangabe bedeutet nichts anderes als: in 1 Liter befinden sich 10^{-1} , also 0,1 mol.

Lösung: 1 Liter enthält 0,1 mol, x mol sind in 3 Litern enthalten.

$$1 : 0,1 = 3 : x$$

$$\frac{1}{0,1} = \frac{3}{x}$$

beide Seiten der Gleichung mit x multiplizieren!

$$\frac{x}{0,1} = \frac{3}{1}$$

Beide Seiten der Gleichung mit 0,1 multiplizieren

$$x = \frac{3}{1} \cdot 0,1 = 0,3$$

In 3 Litern sind also 0,3 mol enthalten.

- c) Auf einer Chemikalienflasche findet man die Angabe, dass das Salz 98% reines NaCl enthält. Wenn man davon 220 g entnimmt, wie viel reines NaCl sind enthalten?

Lösung:

Die entnommene Menge stellen 100% dar!

$$220:100 = x:98$$

$$\frac{220}{100} = \frac{x}{98}$$

$$\frac{220}{100} \cdot 98 = x$$

$$x = 215,6$$

Es sind 215,6 g reines NaCl enthalten. Zur Lösung hätte man natürlich auch 220 mit 0,98 multiplizieren können.