

Blatt 5

Abgabe: 12.06.2013

KONTROLLFRAGEN

- (K1) Woran erkennt man, ob man quantenstatistisch rechnen muss oder klassisch rechnen darf?
- (K2) Was versteht man unter "Fermi-Druck", und wie kommt er zustande?
- (K3) Was versteht man unter Bose-Einstein-Kondensation? Warum hat es 70 Jahre bis zu deren experimentellen Realisierung gedauert?
- (K4) Was versteht man unter "Schwarzkörperstrahlung"? Warum kann man Strahlung als Gas behandeln? Was ist beim Photonengas qualitativ "neu" im Vergleich zu idealen Quantengasen, bei denen $\epsilon_p = p^2/2m$?

AUFGABEN

(5.1) FERMI-ENERGIE UND -TEMPERATUR

20 Punkte

Schätzen Sie die Größenordnungen von Fermi-Energie ϵ_F und -Temperatur $T_F = \epsilon_F/k$ ab für (i) Elektronen in Metallen, (ii) Neutronen und Protonen in Kernen, (iii) Elektronen in weißen Zwergen.

(5.2) PHOTONENGAS

30 Punkte

- (i) Zeigen Sie, dass das chemische Potential des Photonengases verschwindet.
- (ii) Schätzen Sie den Strahlungsdruck ab für (a) eine Atombombenexplosion, (b) die Sonnenoberfläche, (c) für das Sonneninnere.
Hinweis: "Googlen" Sie nach den entsprechenden Temperaturen.
- (iii) Die im Mittel pro Fläche auf der Erde ankommende Strahlungsleistung der Sonne definiert die sog. Solarkonstante $I_0 = 1367 \text{ W/m}^2$. Berechnen Sie die von der Erde aufgenommene Sonnenleistung sowie die Gesamtleistung der Sonne.

(bitte wenden)

Bose-Einstein-Kondensate werden typischerweise in magneto-optischen Fallen realisiert, die in guter Näherung ein dreidimensionales, harmonisches Oszillatorpotential $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$ erzeugen. Die Energie eines Bosons in einer solchen Falle lässt sich in der Form $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \hbar(\omega_x l_x + \omega_y l_y + \omega_z l_z)$, $l_{x,y,z} = 0, 1, 2, 3, \dots$, schreiben, wobei wir die konstante Nullpunktsenergie $E_0 = \hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)/2$ bereits abgezogen haben.

- (i) Zeigen Sie zunächst, dass die Anzahl der Zustände bis zu einer vorgegebenen, maximalen Energie ϵ durch

$$\eta(\epsilon) = \frac{\epsilon^3}{6\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}$$

gegeben ist. Daher ist die Zustandsdichte (s. Abschnitt 3.3.2 im Vorlesungsskript)

$$\nu(\epsilon) = \frac{d\eta(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}. \quad (1)$$

- (ii) Gehen Sie analog zur Vorlesung vor, und benutzen Sie (1), um zu zeigen, dass die mittlere Teilchenzahl

$$\langle N \rangle = \frac{1}{z^{-1} - 1} + \frac{1}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \int_0^\infty \frac{z\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - z}$$

lautet. $z = e^{\beta\mu}$ ist die Fugazität.

- (iii) Zeigen Sie, wiederum analog zur Vorlesung, dass die kritische Temperatur T_c für Bose-Einstein-Kondensation in diesem Fallenpotential durch

$$kT_c = \left(\frac{\langle N \rangle \omega_x \omega_y \omega_z}{1.202} \right)^{1/3} \hbar$$

gegeben ist. *Hinweis:* $\frac{1}{2} \int \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{\exp(\beta\epsilon) - 1} = \beta^{-3} \zeta(3)$, mit der Riemannschen ζ -Funktion, $\zeta(3) \simeq 1.202$.

- (iv) In einem Experiment der Ketterle-Gruppe am MIT 1995 war die Teilchenzahl $\langle N \rangle = 2 \cdot 10^6$. Die Fallenfrequenzen waren $f_x = 235$ Hz, $f_y = 410$ Hz, $f_z = 745$ Hz ($\omega = 2\pi f$). Berechnen Sie T_c .