

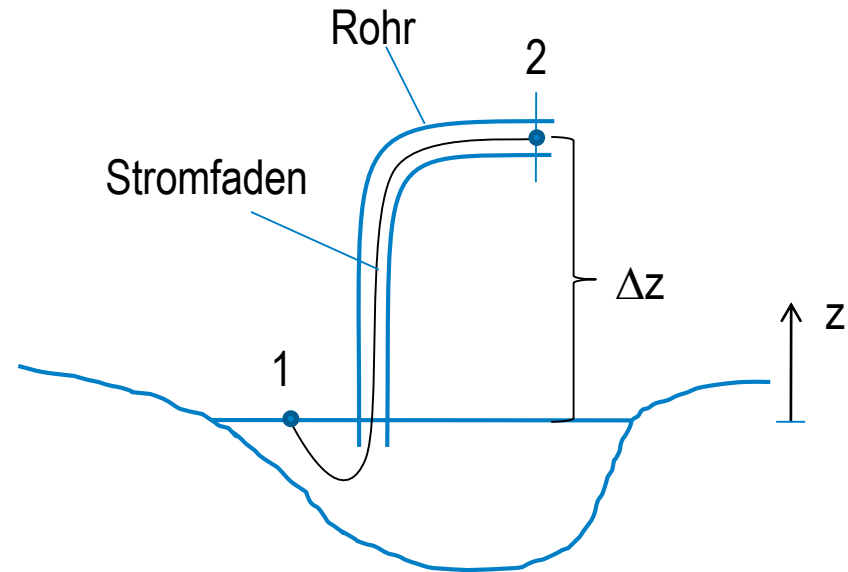
# Kolben- und Strömungsmaschinen

## Seminar 5

Anlagenkennlinie

## Bernoulli-Gleichung

- Strömung ist reibungsfrei und stationär
- Fluid ist inkompressibel
- beschreibt Energieerhaltung ( $E_{\text{pot}} \leftrightarrow E_{\text{kin}}$ )



$$p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}} + p_{\text{geod}} = \text{konst.}$$

$$p + \frac{\rho}{2} c^2 + \rho g z = \text{konst.}$$

$$p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho g z_2$$

## Druckverluste

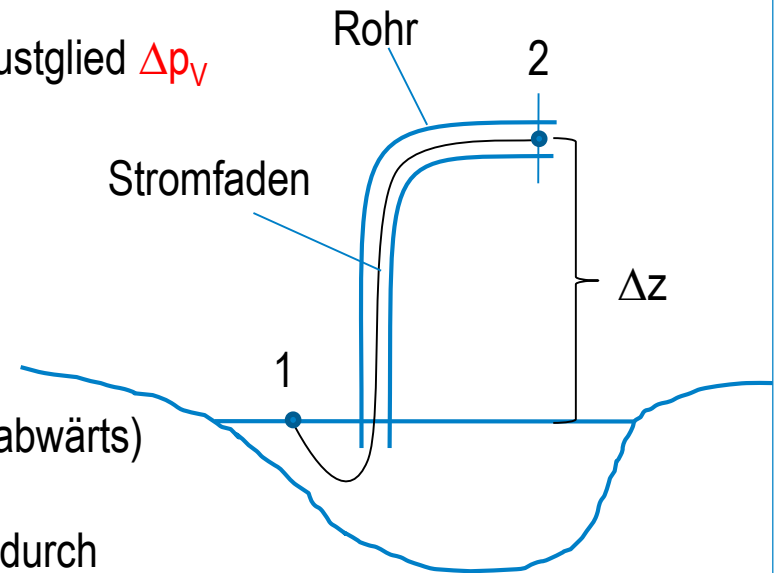
- Abnahme der mechanischen Strömungsenergie beim Durchströmen von Einbauten (Krümmer, Düsen, Diffusoren, Armaturen...) und geraden Rohrleitungen

→ Berücksichtigung durch zusätzliches Druckverlustglied  $\Delta p_v$

→ **Erweiterte Bernoulli-Gleichung**

$$p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho g z_2 + \Delta p_v$$

- $\Delta p_v$  auf rechter Seite (in Strömungsrichtung = stromabwärts)
- Verringerung der mechanischen Strömungsenergie (durch Dissipation) stromabwärts



## Druckverlustarten

- Rohrreibung (Fluidreibung)

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} \lambda \frac{l}{D} c^2$$

l... Rohrlänge  
D... Rohrdurchmesser  
 $\lambda$ ... Rohrreibungsbeiwert

- Einbauten (Widerstände)

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} \sum \zeta c^2$$

$\zeta$ ... Druckverlustbeiwert

## Druckverluste Anlage:

- $c = \text{konst}$

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} \left( \sum_i \lambda_i \frac{l_i}{D_i} + \sum_j \zeta_j \right) c^2$$

- $c \neq \text{konst}$

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} \left( \sum_i \lambda_i \frac{l_i}{D_i} c_i^2 + \sum_j \zeta_j c_j^2 \right)$$

## Rohrreibungsbeiwert $\lambda$

$$\lambda = f(Re, D, k_s)$$

Re... Reynoldszahl  
D... Rohrdurchmesser  
 $k_s$ ... Wandrauheit

- $Re < 2300$  (laminare Strömung)

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

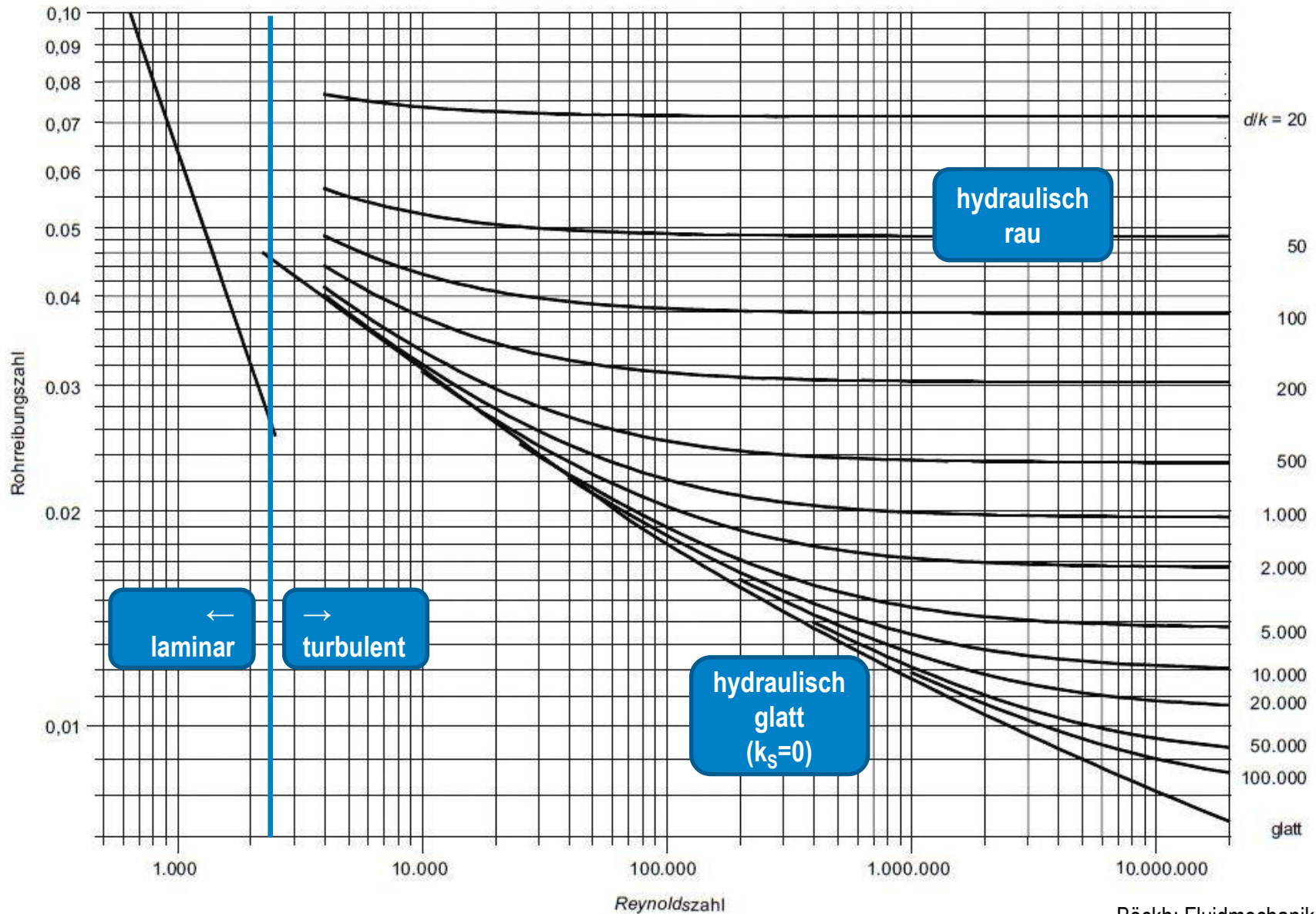
Gesetz von Hagen-Poiseuille

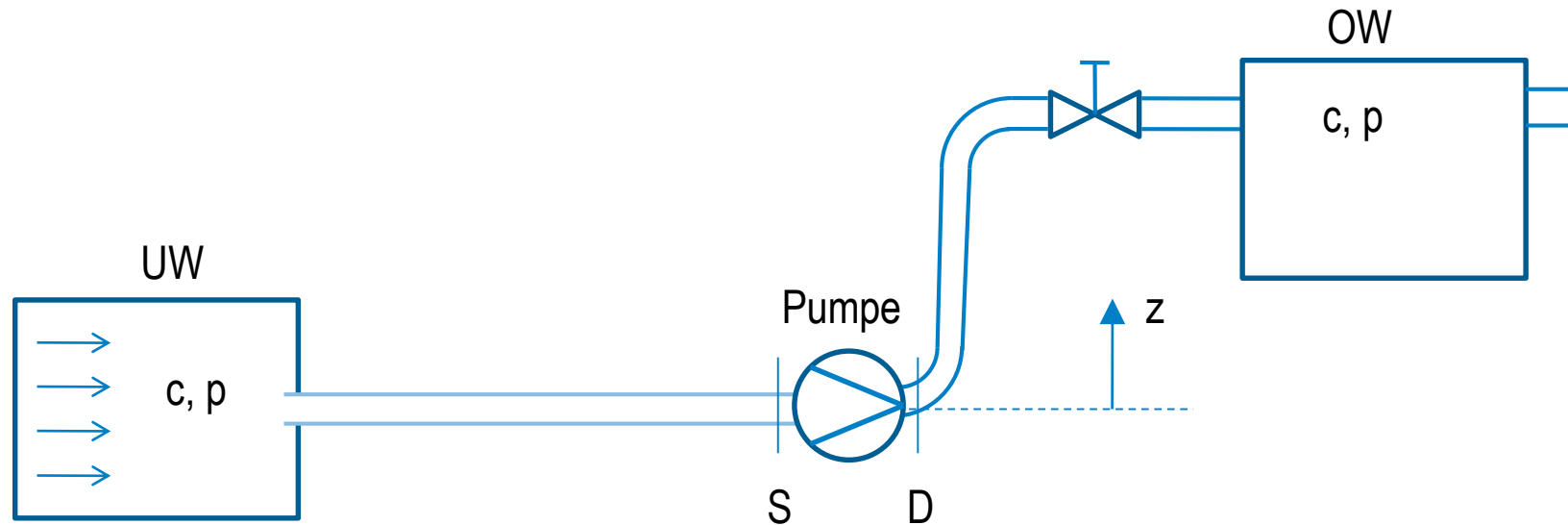
- $Re > 2300$  (turbulente Strömung)
  - Unterscheidung nach hydraulisch glatten und rauen Rohren
  - $\lambda$  aus Näherungsformeln (Blasius, Nikuradse), Tabellen, Diagrammen (Moody-Diagramm)

### Rauigkeitshöhen technischer Rohre

|                                             |                     |
|---------------------------------------------|---------------------|
| gezogene Metall-, Kunststoff- und Glasrohre | 0,0005 bis 0,0015mm |
| nahtlose Stahlrohre, neu                    | 0,02 bis 0,06mm     |
| nahtlose Stahlrohre, verzinkt, neu          | 0,07 bis 0,16mm     |
| Stahlrohre nach längerer Benutzung          | 0,15 bis 3mm        |
| gusseiserne Rohre                           | 0,2 bis 3mm         |

Böckh: Fluidmechanik, 2013



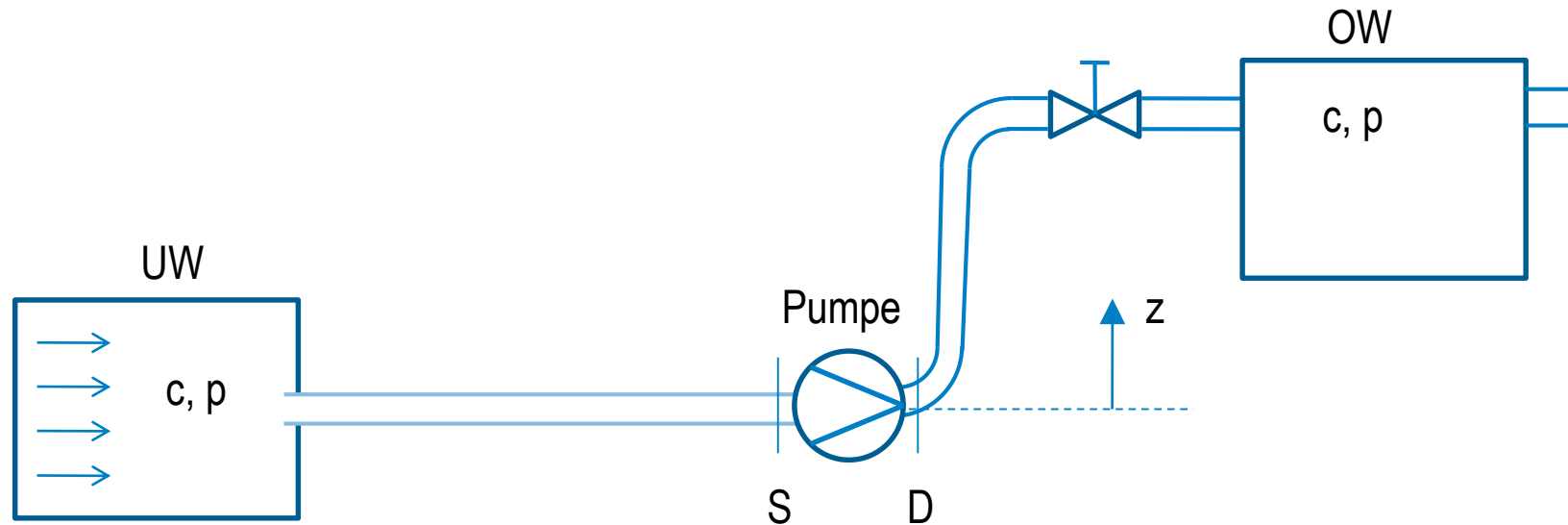


### Bernoulli-Gleichung (Saugseite)

$$p_{UW} + \frac{\rho}{2} c_{UW}^2 + \rho g z_{UW} = \underbrace{p_S + \frac{\rho}{2} c_S^2 + \rho g z_S}_{p_{\text{tot},S}} + \Delta p_{VS}$$

### Bernoulli-Gleichung (Druckseite)

$$\underbrace{p_D + \frac{\rho}{2} c_D^2 + \rho g z_D}_{p_{\text{tot},D}} = p_{OW} + \frac{\rho}{2} c_{OW}^2 + \rho g z_{OW} + \Delta p_{VD}$$



Zwischen Saug- und Druckseite Energiezufuhr durch Pumpe:

$$\Delta p_{tot,SD} = \Delta p_{tot,Anlage}$$

Die Energiezufuhr muss gleich der von der Rohrleitungsanlage zum Transport des Volumenstromes benötigten Rohrleitungsenergie sein.

## Einführung der spezifischen Arbeit Y:

$$Y = \frac{p_{tot}}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + gz$$

$$Y_S = \frac{p_S}{\rho} + \frac{c_S^2}{2} + gz_S = \frac{p_{UW}}{\rho} + \frac{c_{UW}^2}{2} + gz_{UW} - \frac{\Delta p_{VS}}{\rho}$$

$$Y_D = \frac{p_D}{\rho} + \frac{c_D^2}{2} + gz_D = \frac{p_{OW}}{\rho} + \frac{c_{OW}^2}{2} + gz_{OW} + \frac{\Delta p_{VD}}{\rho}$$

$$Y_{Anlage} = Y_D - Y_S = \frac{p_{OW} - p_{UW}}{\rho} + \frac{c_{OW}^2 - c_{UW}^2}{2} + g(z_{OW} - z_{UW}) + \frac{\Delta p_V}{\rho}$$

$$Y_{Anlage} = \frac{\Delta p_A}{\rho} = gH_N$$

$Y_{A...}$

spezifische Förderarbeit, die notwendig ist, um die Anlage zu durchströmen [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ]

$H_{N...}$

Nutzförderhöhe [m]

$$Y_A = \frac{p_{OW} - p_{UW}}{\rho} + \frac{c_{OW}^2 - c_{UW}^2}{2} + g(z_{OW} - z_{UW}) + \frac{1}{2} \left( \sum_i \lambda_i \frac{l_i}{D_i} c_i^2 + \sum_j \zeta_j c_j^2 \right)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot A \cdot c = konst$$

Folgt

$$c = \frac{\dot{V}}{A} \quad \text{und mit} \quad c = konst$$

Gilt

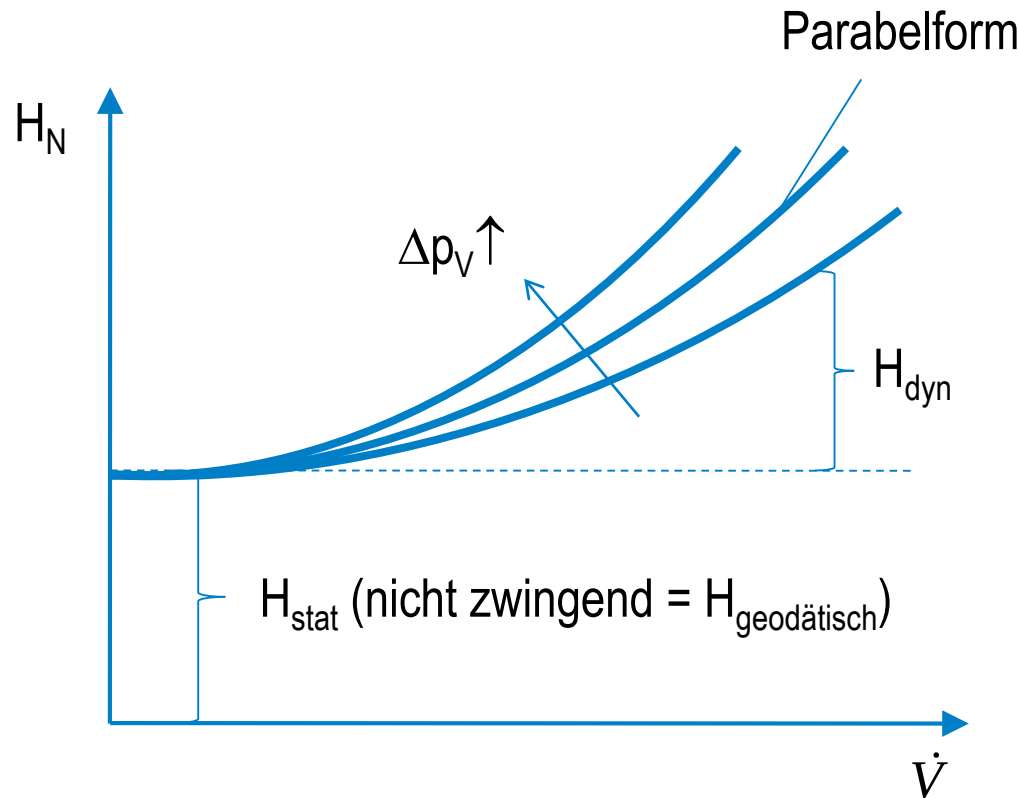
$$Y_A(\dot{V}) = \underbrace{\frac{p_{OW} - p_{UW}}{\rho} + g(z_{OW} - z_{UW})}_{\text{Statischer Anteil, unabhängig von } \dot{V}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_{OW}^2} - \frac{1}{A_{UW}^2} + \sum_i \frac{l_i}{D_i} \frac{\lambda_i}{A_i^2} + \sum_j \zeta_j \frac{1}{A_j^2} \right) \dot{V}^2}_{\text{dynamischer Anteil, abhängig von } \dot{V}}$$

Statischer Anteil, unabhängig von  $\dot{V}$

dynamischer Anteil, abhängig von  $\dot{V}$

$$Y_A(\dot{V}) = Y_{stat} + Y_{dyn}$$

$$H_N = H_{stat} + H_{dyn}$$



## Aufgabe 5a

Ein Pumpspeicherwerk arbeitet mit einem unteren und oberen Wasserbecken von je 700.000 m<sup>2</sup> Grundfläche. Eine Pumpe pumpt das Wasser (Dichte  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ , kin. Viskosität  $\nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) durch eine 300 m lange Rohrleitung mit einem Durchmesser von 2 m vom unteren in das 150 m höher gelegene obere Becken (Abstand der Wasseroberflächen). Die Rohre haben eine Wandraugigkeit von  $k_s=0,4 \text{ mm}$ . Im Nennpunkt wird ein Volumenstrom von 100.000 m<sup>3</sup>/h gefördert.

Die Einbauten in der Anlage haben folgende Druckverlustbeiwerte  $\zeta$ :

- 2xRohrkrümmer je = 0,11
- Ventil (halboffen) = 6
- Rohreinlauf = 0,05

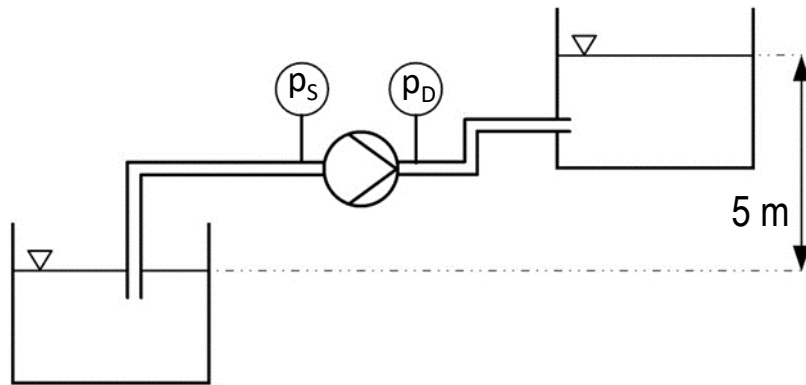
a) Skizzieren Sie das System

b) Ermitteln Sie für den Nennbetriebspunkt folgende Werte:

- mittlere Geschwindigkeit im Rohr
- Rohreibungsbeiwert
- Druckverlust in der Anlage
- Nutzförderhöhe und Gesamtdruckdifferenz, die notwendig sind, um den Nennvolumenstrom zu fördern
- qualitative Anlagenkennlinie

## Aufgabe 5b

Untersuchen Sie die dargestellte Pumpenanlage und lösen Sie die folgenden Teilaufgaben.



Leitungsdurchmesser:

$D=50 \text{ mm}$

Volumenstrom im Betriebspunkt:

$Q=8 \text{ m}^3/\text{h}$

Druck am Druckstutzen

(rel. zu Umgebung):

$p_D = 1,0 \text{ bar}$

Druck am Saugstutzen

(rel. zu Umgebung):

$p_S = -0,05 \text{ bar}$

Medium: Wasser

$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

- Für das gegebene System ist auf der Grundlage der gemessenen Werte der Druckverlustbeiwert  $\zeta$  der Rohrleitungsanlage unter Vernachlässigung des Reibungsbeiwertes  $\lambda$  zu bestimmen. Die Volumen der Wasserbecken sind im Verhältnis zum Fördervolumen sehr groß.
- Wie groß muss die Antriebsleistung der Pumpe im Betriebspunkt sein, wenn der Wirkungsgrad  $\eta_P=0,8$  ist?
- Geben Sie die Nutzförderhöhe und die spezifische Pumpenarbeit für den Betriebspunkt an.
- Zeichnen Sie die Rohrleitungskennlinie in einem maßstabsgerechten  $H_N$ - $Q$ -Diagramm. Begründen Sie die Lage des Anfangspunktes dieser Kurve. Um was für eine Kurve handelt es sich im mathematischen Sinne?